

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:

1

Номер задачи:

Парақ нөмірі:

1

Номер листа:

Парақтардың жалпы саны

Общее количество листов:

Қатысушының коды:

Код участника:

Задача №1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 9 - 5y \\ 2y^2 + 2x = 9y - 22 \end{cases}$$

Решение:

Из первого уравнения: $x^2 + 4x + 4 - 4 = 9 - 5y$; $(x+2)^2 = 13 - 5y \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = \frac{13 - (x+2)^2}{5}$

Решим второе уравнение относительно y :

$$y^2 - 9y + 2x + 22 = 0$$

$$D = 9^2 - 4(2x + 22) = 81 - 8x - 88 = -8x - 7 \geq 0 \quad (x \leq -\frac{7}{8})$$

$$y_1 = \frac{9 + \sqrt{-7-8x}}{2}$$

$$y_2 = \frac{9 - \sqrt{-7-8x}}{2}$$

Рассмотрим первый случай, когда $y = \frac{9 + \sqrt{-7-8x}}{2}$. Тогда

$$\frac{9 + \sqrt{-7-8x}}{2} = \frac{13 - (x+2)^2}{5}; \quad 45 + 5\sqrt{-7-8x} = 26 - 2(x+2)^2;$$

$5\sqrt{-7-8x} = -19 - 2(x+2)^2$. Правая часть уравнения всегда отрицательная и не может быть равна нулю. Левая часть всегда положительная. Поэтому уравнение не имеет решения.

Рассмотрим второй случай, когда $y = \frac{9 - \sqrt{-7-8x}}{2}$. Тогда

$$\frac{9 - \sqrt{-7-8x}}{2} = \frac{13 - (x+2)^2}{5}; \quad 45 - 5\sqrt{-7-8x} = 26 - 2(x+2)^2;$$

$$-5\sqrt{-7-8x} = -19 - 2(x+2)^2; \quad 5\sqrt{-7-8x} = 19 + 2(x+2)^2$$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

1
2

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

Қатысушының коды:
Код участника:

Возвращаем обе маені в квадрат:

$$-25(7+8x) = 361 + 38 \cdot 2(x+2)^2 + 4(x+2)^4$$

$$-175 - 200x = 361 + 38 \cdot 2(x+2)^2 + 4(x+2)^4$$

$$4(x+2)^4 + 76(x+2)^2 + 200x + 536 = 0$$

$$4(x+2)^4 + 76(x+2)^2 + 200(x+2) + 136 = 0$$

Возвращаем замену $x+2 = t$:

$$4t^4 + 76t^2 + 200t + 136 = 0 \quad | :4$$

$$t^4 + 19t^2 + 50t + 34 = 0$$

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

2
1

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

Қатысушының коды:
Код участника:

Задача №2. Таптың көмегімен таптың санын
 $1^{2022} + 2^{2022} + \dots + 2021^{2022}$

Решение:

Рассмотрим случаи, когда число оканчивается на :

- на 1, то оно в любой степени оканчивается на 1
- на 2, то оно в какой-либо степени оканчивается на 2; 4; 8; 6. Это продолжается циклично. Число 2022 при делении на 4 дает остаток 2. Поэтому $\dots 2^{2022}$ оканчивается на 4.
- на 3, то оно в какой-либо степени оканчивается на 3; 9; 7; 1. Значит, $\dots 3^{2022}$ оканчивается на 9.
- на 4, то оно в любой степени оканчивается на 4; 6. Число 2022 - четное, поэтому $\dots 4^{2022}$ оканчивается на 6.
- на 5, то оно в любой степени оканчивается на 5.
- на 6, то оно в любой степени оканчивается на 6.
- на 7, то оно в какой-либо степени оканчивается на 7; 9; 3; 1. Значит $\dots 7^{2022}$ оканчивается на 9.
- на 8, то оно в какой-либо степени оканчивается на 8; 4; 2; 6. Значит $\dots 8^{2022}$ оканчивается на 4.
- на 9, то оно в какой-либо степени оканчивается на 9; 1. Значит $\dots 9^{2022}$ оканчивается на 1.
- на 0, то оно в любой степени оканчивается на 0.

Республикалық
оқушылар олимпиадасының
екінші (аудандық) кезеңі

Математика

2021-2022 оқу жылы / учебный год

Второй (районный)
этап Республиканской
олимпиады школьников

Есеп нөмірі:
Номер задачи:
Парақ нөмірі:
Номер листа:

2
2

Парақтардың жалпы саны
Общее количество листов:

Қатысушының коды:
Код участника:

$$\begin{aligned} \text{Сумма} & \dots 1^{2022} + \dots 2^{2022} + \dots 3^{2022} + \dots 4^{2022} + \dots 5^{2022} + \dots 6^{2022} + \\ & + \dots 7^{2022} + \dots 8^{2022} + \dots 9^{2022} + \dots 0^{2022} \text{ оқамшыланды ма} \\ & \dots 1 + \dots 4 + \dots 9 + \dots 6 + \dots 5 + \dots 6 + \dots 9 + \dots 4 + \dots 1 + \dots 0 = \\ & 2 \dots 5, \text{ т.е. ма } 5. \end{aligned}$$

Тамаша сумманы 6 дағдымен қысқартып $\left[\frac{2021}{10} \right] = 202$.

Тамаша образды, қысқартып қысқартып қысқартып ма

$$\underbrace{\dots 5 + \dots 5 + \dots 5}_{202} + \dots 6^{2022} = \dots 0 + \dots 1^{2022} = \dots 1, \text{ т.е. ма } 1$$

Атауы: 1